微分方程式

例　ばねの単振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \longrightarrow x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

微分方程式の特徴

条件が無い場合は１つの関数ではなく**一般式としての解**が得られる (不定積分と同じ)

微分方程式の解法①

両辺を積分する

例

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{x} \rightarrow x\,dx=dt$$

$$\int x\,dx=\int dt$$

$$\frac{x^2}{2}+C=t+C'$$

$$x=\pm\sqrt{2t+C''}$$

微分方程式の解法②

特性方程式を使う

例

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=0 \rightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0$$

$$\lambda=3,\,-1$$

$$x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$$

確認

$$(左辺)=(9-6-3)C_1e^{3t}+(1+2-3)C_2e^{-t}$$
$$=0$$

特殊解が求まる時

例

$$\frac{dx}{dt}=kx+3 \rightarrow \frac{dx}{dt}-kx=0 \text{ を考える}$$

$$x=C_1e^{kt}$$

$$x=C_1e^{kt}+C_2 \text{ とおく}$$

$$C_1ke^{kt}=C_1ke^{kt}+\underbrace{C_2k+3}_{0}$$

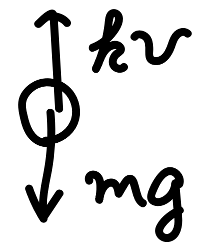
$$C_2=-\frac{3}{k}$$

$$x=C_1e^{kt}-\frac{3}{k}$$

質量 m の物体を高さ h から落下させた。速さに比例する空気抵抗 kv の力があった時、時刻 t での物体の高さは？

$t=0$, $y=h$ …O

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-k\frac{dy}{dt}-mg$$



$$m\lambda^2+k\lambda=0$$

$$\lambda=0,\,-\frac{k}{m}$$

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}+C_3t \text{ とおく}$$

$$C_3=-\frac{mg}{k}$$

$y=0$ —

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}t$$

$t=0$ のとき $y=h,\ v=0$ より、 $C_1=h+\frac{m^2g}{k^2}$　$C_2=-\frac{m^2g}{k^2}$

$$y=-\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}t+h+\frac{m^2g}{k^2}$$