

波が満たす条件式

・波とは

振幅

位置 x と時刻 t に依存する単一の波

波長

$$\varphi(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

周期

これらの足し合わせも波

位相

・波が満たす条件式とは

$$\varphi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \text{ とおく}$$

偏微分してみる

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A \omega \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -A \omega^2 \sin(\omega t - kx) = -\omega^2 \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -A k \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -A k^2 \sin(\omega t - kx) = -k^2 \varphi$$

よって

$$\varphi = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

波の速さ v

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

波動方程式

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

・三次元に拡張

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(r, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi(r, t)}{\partial t^2}$$

ベクトル演算子 ∇ (ナブラ) を導入

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$(\nabla \cdot \nabla) \varphi(r, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi(r, t)}{\partial t^2}$$

スカラー演算子ラプラシアン Δ

$$\Delta \varphi(r, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi(r, t)}{\partial t^2}$$

・練習問題

$\exp[i(\omega t - kx)]$ が波動方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -ik e^{i(\omega t - kx)} = -ik \varphi$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -k^2 e^{i(\omega t - kx)} = -k^2 \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = i\omega e^{i(\omega t - kx)} = i\omega \varphi$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i(\omega t - kx)} = -\omega^2 \varphi$$

$\exp[i(\omega t - kx)]$ は複素数
に拡張した波!