行列式を求めるためのルールと4次以上の解法

☆ 行列式のルール

① Aのある行または列を定数倍(c倍)したとき、行列式は$c \cdot \det A$になる

② Aのある行または列に横または縦ベクトルを足したとき、行列式は以下のようになる

$$\det\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$$

③ Aの行または列で全く同じものがあるとき、$\det A = 0$

④ Aのある行または列に別の行または列の定数倍を足しても行列式は変わらない。

⑤ Aのある2つの行または列を入れ替えたとき、行列式は$-\det A$になる

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = bc - ad = -\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

①〜⑤は$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$から示すことができる。

☆ 4次以上の行列式の解法

・次数下げ

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \times \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{n-1\text{次行列}}$$

a_{21}からa_{n1}までが全て0のとき、考えるべき$\sigma \in S_n$の数が減る

$$\{\sigma \in S_n \mid \underbrace{\sigma(1) = 1}\} \rightarrow \sigma \in S_{n-1}$$

※ 列だけでなく、行の時(a_{12}からa_{1n}まで全て0の時)も同様になる

もし、上三角行列、下三角行列だった場合はn回次数下げができる。

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \ a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

対角成分の積

この形まで変形させるためには簡約化が有効!!

・余因子展開

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_k (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

Aからi行目とk列目を取り除いてできる行列

ただし、$1 \leq i \leq n$（なんでもいい、列を固定してもよい）

例）

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ を2行目について

余因子展開

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -0\times\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\times\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-0\times\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\times\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3\times\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3\times\{(1\cdot0\cdot0+3\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot2)-(1\cdot0\cdot2+2\cdot1\cdot1+3\cdot2\cdot0)\}$$

$$= 3\times(11-2)$$

$$= 27$$

☆練習問題

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = ?$$

答え

3行目についての余因子展開が楽

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -1\times\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\times\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -\{(15+0+2)-(0-6-4)\} - 3\{(6+12-5)-(-2-45-4)\}$$

$$= -27-192$$

$$= -219$$