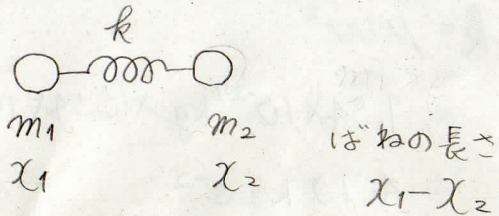


ばねで繋がれた 2 物体の運動



★ 重心 X

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

ここで

$$\begin{cases} r_1 = x_1 - X \\ r_2 = x_2 - X \end{cases} \text{とおく}$$

★ 重心から見た全運動量 P

$$\begin{aligned} P &= m_1 \frac{dr_1}{dt} + m_2 \frac{dr_2}{dt} \\ &= m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} - (m_1 + m_2) \frac{dX}{dt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

★ 全運動エネルギー K

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left\{ \frac{d}{dt} (r_1 + X) \right\}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ \frac{d}{dt} (r_2 + X) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dr_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dr_2}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

重心から見た
各物体の運動エネルギー

重心の
運動エネルギー

ここで $r = x_1 - x_2$ とおくと、

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dr_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dr_2}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{\text{換算質量}} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

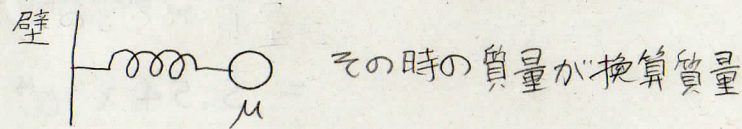
★ 換算質量 μ

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{特に } m_1 = m_2 = m \text{ のとき}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \mu = \frac{m}{2}$$

$$K = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{dX}{dt} \right)^2$$

重心から見れば「1つの物体の運動と考えられる。」



$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -k (r - r_e) \quad r_e: \text{振動中心}$$

$$r - r_e = A \cos(\sqrt{\frac{k}{\mu}} t) + B \sin(\sqrt{\frac{k}{\mu}} t)$$

角周波数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

★ 練習問題

$^{12}\text{C}-^1\text{H}$ 結合の振動準位が波長 3400nm の赤外線
の吸収と共に励起したとき、力の定数 k の値は?

計算パラメータ

$$M_C = 12.0 \text{ g/mol}$$

$$M_H = 1.00 \text{ g/mol}$$

$$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad k = \mu \omega^2$$

$$= 1.54 \times 10^{-27} \text{ kg} \times (5.54 \times 10^4 \text{ s}^{-1})^2$$

$$= 470 \text{ kg s}^{-2}$$

$$= 0.470 \text{ N/mm}$$

柔さめのはねと同じらしい

答え

$$\text{振動準位 } E = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

$$\Delta E = \hbar \omega$$

$$\frac{\hbar c}{\lambda} = \hbar \omega \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$= \frac{2\pi \times 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{3400 \times 10^{-9} \text{ m}}$$

$$= 5.54 \times 10^4 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\mu = \frac{M_C M_H / N_A^2}{M_C / N_A + M_H / N_A}$$

$$= \frac{12.0 \text{ g}^2 \text{ mol}^{-2}}{13.0 \text{ g mol}^{-1} \times 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}$$

$$= 1.53 \times 10^{-24} \text{ g}$$