行列式の定義と2次、3次行列式の解法

☆ 行列式

n次正方行列について $\det A$, $|A|$などで表す

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ただし S_nはn次の全ての置換の集合

$\sigma \in S_n$: σはS_nの要素

a_{ij}はAの(i,j)成分

例) $n=2$, $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det A = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}$$

$$= 1 \times ad + (-1) \times (bc)$$

$$= ad - bc$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - 3 \times 2 = -5$$

☆ 3次行列式の解法

サラスの方法

$$+ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 2)$$

$$- (2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 3)$$

$$= (6 + 0 - 2) - (0 + 1 + 0)$$

$$= 4 - 1$$

$$= 3$$

☆ 練習問題

(1) $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$ (2) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 2 \end{pmatrix} = ?$

答え

(1) $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2$

(2) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 7 \cdot 0 + 9 \cdot 0 \cdot 0 - (0 \cdot 3 \cdot 9 + 0 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2)$

$$= 6 - 0$$

$$= 6$$