行列式が持つ意味

☆ 正則行列の判定

正則行列 … 逆行列が存在する正方行列

以下のことは同値（必要十分）。

① $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ となる A^{-1} が存在

② $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ はただ1つの厳密解をもつ

③ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみ

④ $\mathrm{rank}(A) = n$

⑤ $\det A \neq 0$

例）$\det\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - (-4)(-2) = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ は正則行列でない

☆ 平行四辺形の面積

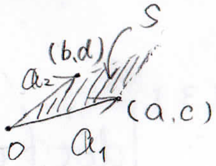
2次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ について $|\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|$ は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ で張られた平行四辺形の面積になる

$$S = |\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\sqrt{1 - \frac{(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2)^2}{|\boldsymbol{a}_1|^2|\boldsymbol{a}_2|^2}}$$

$$= \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2) - (a^2b^2+2abcd+c^2d^2)}$$

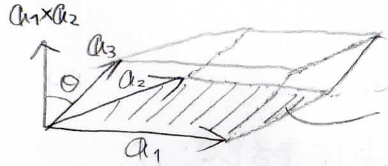
$$= \sqrt{(ad-bc)^2}$$

$$= |ad-bc|$$



☆ 平行六面体の体積

3次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ について $|\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ で張られる平行六面体の体積になる



体積 V

底面積 $|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|$

$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ がなす角を θ とすると、底面と $\boldsymbol{a}_3$ がなす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ になる

$$V = \underbrace{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}_{\text{底面積}}\underbrace{|\boldsymbol{a}_3|\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}_{\text{高さ}}$$

$$= |\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2||\boldsymbol{a}_3|\cos\theta$$

$$= (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{array}$$

$$= a_{13}\det A_{13} - a_{23}\det A_{23} + a_{33}\det A_{33} \quad \text{余因子展開}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \det A_{13} & \det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}_3}$$

$$= (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3$$

$$= V$$

☆同一直線上、平面上の判定

・直線

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ が同一直線上にあるとき、

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

3点が $ax+by+c=0$ 上にあるとき、

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

を満たす $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$ が存在する

↓

$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$ は正則行列でない

↓

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

↓ $\det {}^tA = \det A$

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

・平面

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)$ が同一平面上にあるとき、

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

☆練習問題

(1) $(3, 2, -2), (-2, 1, 3)$ $(0, 3, -1)$ を通る平面の式は？

(2) $(1, 0, -1), (3, 1, 1), (-1, 2, 2)$ で張られる平行六面体の体積は？

答え

(1)

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & x \\ 2 & 1 & 3 & y \\ -2 & 3 & -1 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & y \\ 3 & -1 & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & y \\ -2 & -1 & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-x\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3(4y+2z-10)+2(-y+z+4)$$

$$-x\times(-6)$$

$$=0$$

よって $3x+5y+4z-11=0$

(2)

$$\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = |(2+0-6)-(1+2+0)| = 7$$