単位行列、転置行列、逆行列

☆単位行列 E_n

$$E_nA = AE_n = A \quad (A\text{は}n\text{次正方行列})$$

例)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

☆転置行列

$n \times m$ 行列 A の成分を a_{ij} としたとき、(i,j) 成分が a_{ji} となる $m \times n$ 行列を A の転置行列と言い、${}^tA$ と表す。(A^T という表記も可)

例)
$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

また次の関係が成り立つ

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$
$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

☆逆行列

n 次正方行列 A について、以下のようになる n 次正方行列 B を A の逆行列と言い、A^{-1} と表す。

$$AB = BA = E_n$$

※行列の積は一般的には交換不能

①
$$AB = E_n$$
$$BAB = BE_n = B \quad (\text{両辺に左から}B\text{をかける})$$
$$(BA)B = B$$
$$BA = E_n$$

②
$$AB = E_n = E_n \cdot E_n$$
$$AB = (AB)(AB)$$
$$= A(BA)B$$
$$BA = E_n$$

☆逆行列の求め方

$$\boxed{AA^{-1} = E_n}$$
$$A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}E_n \quad (\text{両辺に左から}A^{-1}\text{をかける})$$
$$\boxed{E_nA^{-1} = A^{-1}}$$

未知の行列 A^{-1} が作用する行列　その積

$(A \,\vdots\, E_n)$ は簡約化すると $(E_n \,\vdots\, A^{-1})$ になる

A のランクが n より小さい場合、逆行列は存在しない

☆練習問題

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列は?

答え

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$$

したがって、

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

たしかめ

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2\times3-1\times(-1) & 2\times1-1\times2 \\ 1\times3+3\times(-1) & 1\times1+3\times2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一般的に

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$ となる

※ $ad-bc=0$ のとき逆行列は存在しない