重積分とヤコビアン

☆ 重積分とは

いくつかの変数について積分すること

$$\int_{\bar{U}} f(x,y)\,dx\,dy$$

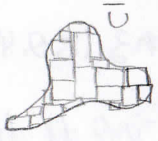
$f(x,y)$: $\bar{U}$ (xy平面内の有界な領域)
上で連続な関数

有界

閉じた領域であり、完全に含まれてしまうような領域 $\bar{V}$ が存在する。

一般的に積分はリーマン和の極限

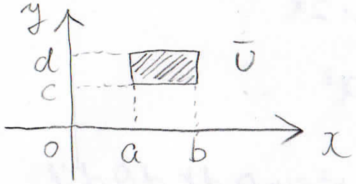
↳ $\bar{U}$を小さく分割



☆ $\bar{U}$が長方形のとき

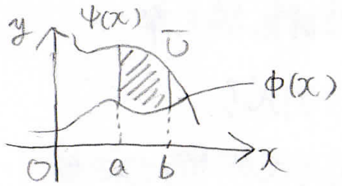
$\bar{U} = [a,b]\times[c,d]$

([ ] : 閉区間
( ) : 開区間)



$$\int_{\bar{U}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

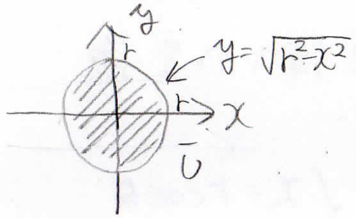
☆ yがxの関数だったとき



$\bar{U} = [a,b]\times[\phi(x),\psi(x)]$

$$\int_{\bar{U}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

例　円の面積 (高さが1の円柱の体積)



$$S = 2\int_{-r}^{r}\left[\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} 1\cdot dy\right]dx$$
$$= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$
$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 2r^2\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \pi r^2$$

$x = r\sin\theta$

x	$-r$	r
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

$dx = r\cos\theta\,d\theta$

☆ 置換積分

・一変数のとき

$$\int f(x)\,dx = \int f(u)\frac{dx}{du}\,du$$

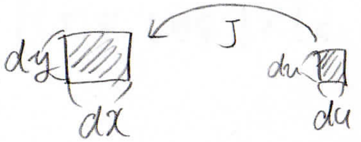
多変数のときどうなるか?

・$(x,y)\to(u,v)$

ヤコビアン

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

ヤコビアンは $dudv$ から $dxdy$ への面積拡大率



なぜ行列式?

↳ 行列式が平行四辺形の面積になるのと同じイメージ

N 変数のとき J は N 次行列式になる

例) 直交座標から極座標への変換

・2次元

$(x, y) \to (r, \theta)$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta)$$

$$= r$$

・3次元

$(x, y, z) \to (r, \theta, \varphi)$ $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi$$

$$= r^2\sin^3\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + r^2\sin\theta\cos^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$= r^2\sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\varphi)$$

$$= r^2\sin\theta$$

☆ 練習問題

(1) 半径 a の球の体積 $\frac{4}{3}\pi a^3$ を導出

(2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 上で $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ を積分すると?

答え

(1) 半径 r の球に含まれる (r, θ, φ) を数え上げる

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} 1 \cdot r^2\sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3$$

(2)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 \cdot r^2\sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi$$

$$= \frac{4}{5}\pi$$