行列の加法、乗法と連立方程式

☆ 行列の足し算

同じ(i,j)成分同士を足す

例) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

☆ 行列のかけ算

$n \times k$ 行列と $k \times m$ 行列の積しか定義できない

$n \times k$ 行列の各成分 a_{ij}，$k \times m$ 行列の各成分 b_{ij}

としてその積となる行列の成分 c_{ij} は次のようになる。

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$$

例) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\times0+0\times1 & -1\times1+0\times(-1) \\ 1\times0+1\times1 & 1\times1+1\times(-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

縦ベクトルを $m \times 1$ 行列と見なすと、

例) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3+1\times1 \\ -1\times3+0\times1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

行列と縦ベクトルの積は縦ベクトルになる

☆ 連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{係数行列}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

簡約化の操作は連立方程式を解くことに等しい

・拡大係数行列の導入

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

係数　右辺

これを簡約化

厳密に解ける場合

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

一般解となる場合

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & x+az \\ 0 & 1 & b & y+bz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

拡大係数行列、係数行列のランクが未知数の個数と同じとき、厳密解が得られる

☆ 練習問題

行列の簡約化で連立方程式を解いてみよう!

(1) $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ -x + 3y + z = -10 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + 1z = 12 \\ 3x + 4y + 11z = 6 \end{cases}$

答え

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 8 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1行目) \\ (2行目)+(1行目) \\ (3行目)-(1行目)\times 3 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 31 & -31 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1行目)+(3行目) \\ (3行目)\times(-1) \\ (2行目)+(3行目)\times 4 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1行目)-(3行目)\times\frac{6}{31} \\ (2行目)+(3行目)\times\frac{8}{31} \\ (3行目)\times\frac{1}{31} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1行目) \\ (2行目)-(1行目)\times 3 \\ (3行目)-(1行目)\times 3 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1行目)+(2行目) \\ (3行目) \\ (2行目)+(3行目) \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 3z = 6 \\ y + 5z = -3 \end{cases}$$

$z = c$ （任意の定数）として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3c \\ -3-5c \\ c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} など$$