行列の簡約化、ランク

☆ 行列とは？

$n \times m$ 個の成分からなる塊

例） 3×4 行列 A

$$
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\leftarrow 1\text{行目} \\
\leftarrow 2\text{行目} \\
\leftarrow 3\text{行目}
\end{array}
\\
\begin{array}{cccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
1\text{列目} & 2\text{列目} & 3\text{列目} & 4\text{列目}
\end{array}
&
\end{array}
$$

$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix}$ とおくと、$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$

$n \times m$ 行列 ＝ m 個の n 次列ベクトル群
n 個の m 次行ベクトル群

・零行列

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

成分が全て0

・正方行列

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \\
a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$n \times n$ 行列

・対角行列

$$
\begin{pmatrix}
c_1 & & & \\
& c_2 & & 0 \\
& 0 & \ddots & \\
& & & c_n
\end{pmatrix}
$$

正方行列のうち
対角成分以外が0の行列

・三角行列

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
& a_{22} & & \vdots \\
& 0 & \ddots & \\
& & & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

主対角線より下が全て0（上三角）
もしくは上が全て0（下三角）

☆ 行列の簡約化

各行の成分同士をスカラー倍と加減の操作で
次の形にすること

$$
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

・各行左から見ていったときに
0でない最初の成分は1
・各行で1がある列のその他
の成分は0
・上の行から1が階段状に並ぶ

例）

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
(1\text{行目}) \\
(2\text{行目}) \times \frac{1}{2} \\
(3\text{行目}) - (1\text{行目}) \times 3
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
(1\text{行目}) - (2\text{行目}) \times 3 \\
(2\text{行目}) \\
(3\text{行目}) + (2\text{行目}) \times 7
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{cl}
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{単位行列}}
&
\begin{array}{l}
(1\text{行目}) + (3\text{行目}) \times \frac{2}{3} \\
(2\text{行目}) - (3\text{行目}) \times \frac{1}{3} \\
(3\text{行目}) \times (-\frac{1}{3})
\end{array}
\end{array}
$$

全ての成分が1となる対角行列
スカラーでの1に当たるもの

☆ ランク

簡約化したときに全て0にならなかった行の個数

例）

$$
\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3
$$

$$
\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2
$$

☆ 練習問題

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{のランクは？}$$

答え

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1\text{行目}) \\ (2\text{行目})-(1\text{行目})\times 2 \\ (3\text{行目})+(1\text{行目}) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1\text{行目}) \\ (2\text{行目})\times(-\frac{1}{3}) \\ (3\text{行目})+(2\text{行目}) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1\text{行目})-(2\text{行目}) \\ (2\text{行目}) \\ (3\text{行目}) \end{array}$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2$$