線形代数における置換

☆ 置換とは

n個の整数からなる集合<1, 2, 3, … n>から自身への1対1写像

例）$n=3$　　$1\to 2,\ 2\to 1,\ 3\to 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ と表す

これを一般化すると、

$1\to k_1,\ 2\to k_2,\ 3\to k_3, \cdots n\to k_n$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

$$\sigma(i) = k_i$$

・置換の数

$n=1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　1個

$n=2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　2個

$n=3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6個

$n!$個の置換が存在する

☆ 置換の積

n文字の置換σ, τについて

$$\sigma\cdot\tau(i) = \sigma(\tau(i))$$

例）$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma\cdot\tau(1) = \sigma(1) = 3$

$\sigma\cdot\tau(2) = \sigma(3) = 2$

$\sigma\cdot\tau(3) = \sigma(2) = 1$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

☆ 単位置換

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$　$n\to n$

$\sigma\tau = \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ となるとき、

τをσの逆置換といい、σ^{-1}と表す

※ $\sigma\tau = \tau\sigma$は一般には成り立たない

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

逆置換の求め方

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

σ を上下入れかえ $\longrightarrow$ 上段をベースに並べる

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma^{-1}}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma \\ 2 & 4 & 1 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma^{-1} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

☆ 巡回置換

$k_1 \to k_2,\ k_2 \to k_3 \cdots k_{r-1} \to k_r,\ k_r \to k_1$ としてそれ以外は固定とする置換を長さ r の巡回置換と呼ぶ

$\sigma = (k_1\ k_2 \cdots k_r)$ と表す

例) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $2 \to 5 \to 3 \to 2$

$= (2\ 5\ 3)$

特に $r=2$ の巡回換換を互換という

例) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)$

任意の置換は いくつかの互換の積になる

例)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)$

$= (3\ 4)(2\ 4)(1\ 4)$

$= (2\ 3)(1\ 3)(3\ 4)$

互換の組み合わせは1通りとは限らない

☆ 練習問題

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする

(1) $\sigma^{-1} = ?$ (2) $\sigma\tau = ?$

(3) σ を巡回置換の形で書くと?

(4) τ を互換の積で表すと?

答え

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $(1\ 3\ 4)$ (4) $(1\ 2)(2\ 4)(3\ 4)$ など