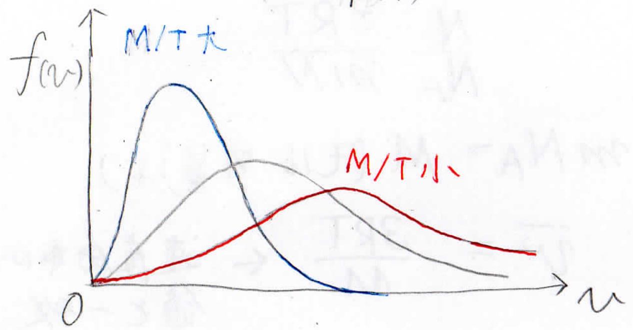
速度分布の利用

☆マクスウェル－ボルツマン分布

並進エネルギーだけをもつ理想気体分子の速度分布

$$f(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right)dv$$



☆ 最確速さ v^*

最も多くの分子が占めている速さ

$$\frac{df}{dv}(v^*) = 0$$

$$\frac{df}{dv} \propto 2v\exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right) - v^2\frac{M}{2RT}(2v)\exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right)$$

$$2v^* - \frac{M}{RT}(v^*)^3 = 0$$

$$v^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}},\ \underbrace{-\sqrt{\frac{2RT}{M}},\ 0}_{不適}$$

☆平均の速さ $\bar{v}$

期待値の考え方

(加重平均) = Σ(値)×(その値になる確率)

$$\bar{v} = \int_0^\infty \underbrace{v}_{値}\ \underbrace{f(v)dv}_{確率}$$

$$= 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \underbrace{\int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right)dv}$$

(ガウス積分

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha^2}$$
)

$$= 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4R^2T^2}{2M^2}$$

$$= \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

☆速さの二乗平均 $\overline{v^2}$

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)dv$$

$$= 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \underbrace{\int_0^\infty v^4 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right)dv}$$

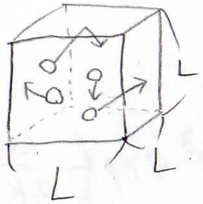
(ガウス積分

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{3}{8\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$
)

$$\overline{v^2} = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left(\frac{2RT}{M}\right)^{\frac{5}{2}}$$

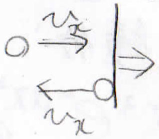
$$= \frac{3RT}{M}$$

☆ 気体分子運動論



一辺がLの立方体

気体分子N個



1回の衝突で壁が受ける力積

$\overline{F}\cdot dt = 2mv_x$

圧力P

$$P = \overline{F}/L^2$$

$$= 2mv_x \underbrace{\frac{v_x}{2L}}_{\text{ある1面への衝突頻度}} N \cdot \frac{1}{L^2}$$

$$= \frac{mN\overline{v_x^2}}{L^3}$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\left(\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+\overline{v_z^2}\right) = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

$$\overline{v^2} = \frac{3PV}{mN}$$

理想気体の状態方程式

$$PV = nRT$$

$$\overline{v^2} = \frac{3PV}{mN}$$

$$= \frac{3nRT}{mN}$$

$$= \frac{N}{N_A}\frac{3RT}{mN}$$

$mN_A = M$ (モル質量)より

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{M}$$

← 速度分布から出した値と一致

系全体の運動エネルギー

$$E = \frac{1}{2}m\overline{v^2}\times N$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{mN}_{nM}\frac{3RT}{M}$$

$$= \frac{3}{2}nRT$$

ここで $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ より $\frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}nRT$

等分配則

$$E = \frac{1}{2}nRT\times(\text{自由度})$$