全微分

☆ C^n-関数

x, yについて偏微分可能な$f(x,y)$について

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ がともに連続であるとき、

「$f(x,y)$はC^1-級関数であるという。

2次偏導関数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

すべて連続ならば、fはC^2-級関数

n次偏導関数がすべて連続 $\Rightarrow$ fはC^n-級関数

無限回偏微分可能かつ
それらの偏導関数がすべて連続 $\Rightarrow$ fはC^∞-級関数

☆ 偏微分の順番入れ替え

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

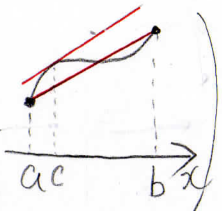
一般的には成り立たない

「fがC^2-級関数 $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$」

（平均値の定理より証明される

$x \in [a,b]$で定義される$f(x)$について

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{df}{dx}(c)$$ となる$c \in [a,b]$が存在）



自然科学で扱う関数は、多くの場合入れ替え可能
特に偏導関数の連続を確かめないことも多い

☆ 全微分

$f(x,y)$が点(a,b)で全微分可能

$\Longleftrightarrow$ ・$f(x,y)$が(a,b)で連続

・$C(a,b)=0$となる連続関数$C(x,y)$があって
$f(x,y)$が(a,b)の周りで次のように表せる。

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + \rho(x,y)C(x,y)$$

ただし、

AとBは定数、$\rho(x,y) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

(a,b)から$(a+dx, b+dy)$へ動いたとき、

$$df = f(a+dx, b+dy) - f(a,b)$$
$$= A\,dx + B\,dy + \underbrace{\sqrt{dx^2+dy^2}\cdot dC}_{ほぼ0}$$

第1次近似

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$ 「fの全微分」と呼ぶ

☆ 練習問題

$df = a\,dx - b\,dy$ のとき、$\dfrac{\partial b}{\partial x}$ をaとyで表すと?
ただし、fはC^2-級関数とする。

答え

$-b = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ より $\dfrac{\partial b}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ より $\dfrac{\partial b}{\partial x} = -\dfrac{\partial a}{\partial y}$