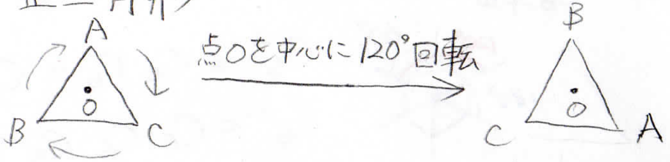
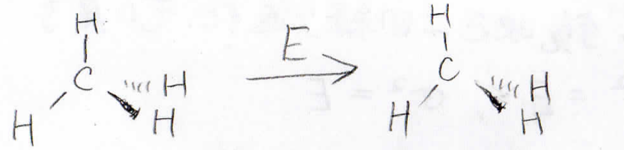
対称操作
動かした後の形が、動かす前と区別できないような操作
例）正三角形



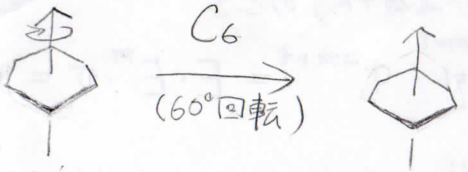
頂点の絶対配置
見かけ上変わらない

○ 恒等操作 E
絶対配置を固定



どんな形であっても E は対称操作になる

○ 回転操作（本義回転操作）C_n
n: 回転の次数
$n=2 \rightarrow 180°$ 回転
$n=3 \rightarrow 120°$ 回転
$n=4 \rightarrow 90°$ 回転
ある軸を中心に $360°/n$ だけ回転

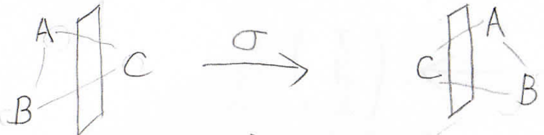


C_6 軸は対称操作 C_6 の対称要素という。

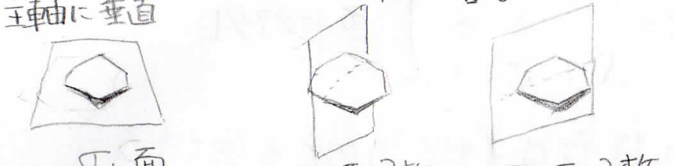
C_6 軸が最も次数が大きい（対称性高い）ため、主軸と呼ぶ

C_2' 軸3本　C_2'' 軸3本

○ 鏡映操作 σ
ある面について、鏡映しにする

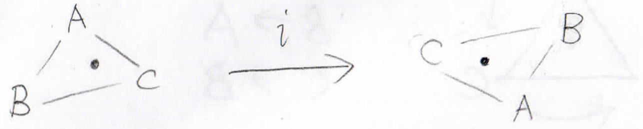


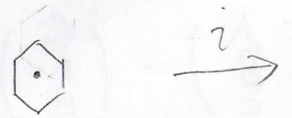
主軸に垂直　主軸を含む



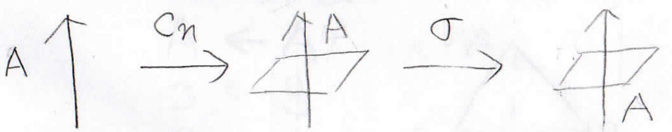
σ_h 面　σ_v 面3枚　σ_d 面3枚

○ 反転操作 i
ある点について、対称な点へ動かす

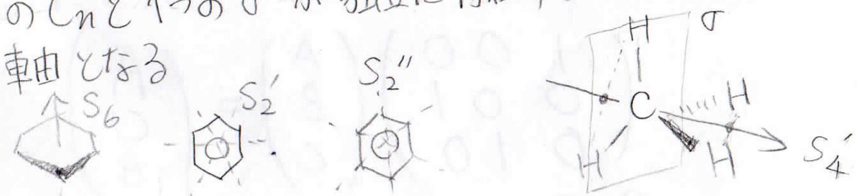




○ 回映操作（転義回転操作）S_n
C_n 回転させてから、その軸と垂直な面について鏡映（σ_h）



1つの C_n と1つの σ が独立に存在するとき、C_n 軸が S_n 軸となる



メタンは C_4 や σ を対称操作に含まない

☆ 行列としての表現

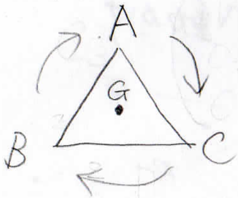
例) 恒等操作

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \xrightarrow{E} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ 単位行列

対称操作はすべて行列で表現できる

例)・重心Gを中心として正三角形を120°回転



A → C
B → A
C → B

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{C_3}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\\A\\B\end{pmatrix}$$

・正三角形の鏡映

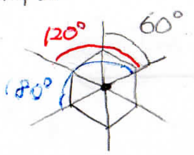
A → A
B → C
C → B

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{\sigma}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\C\\B\end{pmatrix}$$

☆ 対称操作の関係式

・nの約数をmとして、C_n軸はC_m軸となれる

例) C_6軸



$$C_6^2 = C_6\cdot C_6 = C_3$$
$$C_6^3 = C_6\cdot C_6\cdot C_6 = C_2$$

・C_n回転をn回繰り返すと、元に戻る

$$C_n^n = E$$

・反転、鏡映を2回繰り返すと、元に戻る

$$i^2 = E,\quad \sigma^2 = E$$

・回映は、C_n回転と鏡映

$$S_n = C_n\sigma = \sigma C_n$$

・S_n^nはEもしくはσになる

nが偶数($n=2m$)のとき

$$S_n^n = C_{2m}^{2m}\cdot\sigma^{2m} = E\cdot E^m = E$$

nが奇数($n=2m+1$)のとき

$$S_n^n = C_{2m+1}^{2m+1}\cdot\sigma^{2m+1} = E\cdot E^m\cdot\sigma = \sigma$$

☆ 練習問題

アンモニア分子NH_3の対称操作をすべて挙げると?

答え $\overbrace{E},\ \overbrace{C_3,\ C_3^2}$

$\underbrace{\sigma_v,\ \sigma_v',\ \sigma_v''}_{類}$